

EXERCICE 1

Partie A R. O. C. sur la loi de durée de vie sans vieillissement.

Partie B

1. a. De $p(T \leq 10) = \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0,7$
 $\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{10} = 0,7 \iff -e^{-10\lambda} + 1 = 0,7 \iff e^{-10\lambda} = 0,3$, on en dé-
 duit par croissance de la fonction \ln , $-10\lambda = \ln 0,3 \iff \lambda = -\frac{\ln 0,3}{10} \approx$
 $0,1203$.

Désormais $\lambda \approx 0,12$.

b. Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$p_{(T>10)}(T > 15) = \frac{p(T > 10) \cap p(T > 15)}{p(T > 10)} = \frac{p(T > 15)}{p(T > 10)} = \frac{1 - [e^{-0,12t}]_0^{15}}{0,3} = \frac{e^{-0,12 \times 15}}{0,3} \approx$$

0,550.

c. D'après la partie A, la probabilité cherchée est $p(T \leq 5) = [e^{-0,12t}]_0^5 =$
 $1 - e^{-0,6}$.

La probabilité est d'environ $0,451 \approx 0,45$.

2. a. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 6$ et $p = 0,3$.

b. On a $p(Y \geq 4) = p(Y = 4) + p(Y = 5) + p(Y = 6) =$
 $\binom{6}{4} 0,3^4 \times 0,7^2 + \binom{6}{5} 0,3^5 \times 0,7^1 + \binom{6}{6} 0,3^6 \times 0,7^0 = 15 \times 0,3^4 \times 0,7^2 + 6 \times 0,3^5 \times$
 $0,7 + 0,3^6 \approx 0,070$.

La probabilité d'ouvrir de nouvelles caisses est d'environ $0,07$ à 10^{-2}
 près.

EXERCICE 2

1. On a d'une part

- On sait que $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$. Comme $1 < x$, on a $x < x^2 \Rightarrow x + x^2 < 2x^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2x^2} < \frac{1}{x+x^2} \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{2x^2} < \frac{2\ln x}{x+x^2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} < f(x).$$

- De même $1 < x \Rightarrow x < x^2 \Rightarrow 2x < x + x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+x^2} < \frac{1}{2x} \Rightarrow$

$$\frac{2\ln x}{x+x^2} < \frac{2\ln x}{2x} \Leftrightarrow f(x) < \frac{\ln x}{x}.$$

D'où l'encadrement demandé.

2. a. Comme $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x}$, on reconnaît une forme uu' avec $u(x) = \ln x$, qui

a pour primitive $\left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]$.

$$\text{On a donc } I = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_2^4 = \frac{3(\ln 2)^2}{2}.$$

Pour J, on intègre par parties en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x & dv(x) = \frac{1}{x^2} \\ du(x) = \frac{1}{x} & v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$J = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^4 + \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_2^4 = \frac{1}{4}.$$

b. De l'encadrement trouvé en 1, on en déduit, en intégrant entre 2 et 4

$$\text{l'encadrement : } J < K < I \Leftrightarrow \frac{1}{4} < K < \frac{3(\ln 2)^2}{2}.$$

3. L'unité d'aire vaut $1 \times 4 = 4 \text{ cm}^2$. L'aire cherchée est donc le quadruple de l'intégrale K.

Donc $\boxed{1 < \mathcal{A} < 6(\ln 2)^2}$ soit approximativement $1 < \mathcal{A} < 2,883$. (cm^2)