Fiche d'exercices sur le calcul intégral

EXERCICE 1 **5 points**

a. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

i. *Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?*

ii. *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.*

iii. *Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.*

b. *Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par*

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

i. *Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.*

ii. *Calculer I_1, puis I_2.*

iii. *Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.*

c. i. *Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :*

$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e.$$

ii. *En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.*

EXERCICE 2 **4 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}.$$

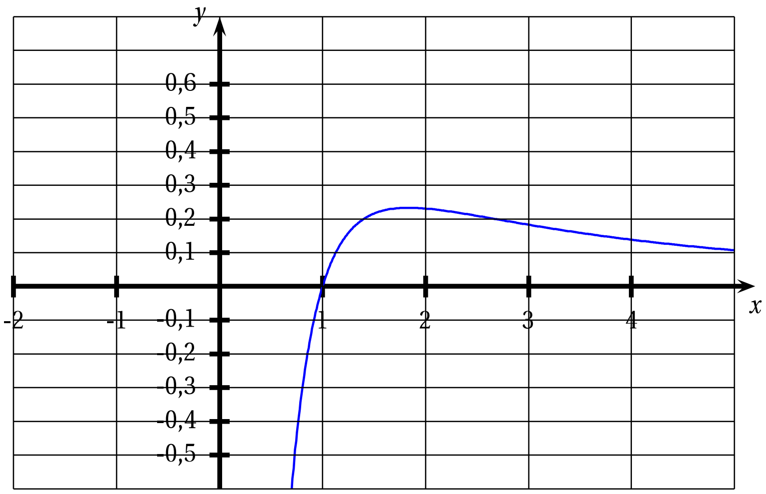
1. Montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$.

2. **a.** Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière).

b. En déduire un encadrement de $\mathrm{K} = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right. \quad \text{et on note } \mathscr{A} \text{ son aire.}$$



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 b, donner un encadrement de $\mathcal{A}$ en cm^2.

EXERCICE 3 **5 points**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 2 \end{array}\right. \quad \text{et } v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geqslant 1$$

1. **a.** Calculer u_2, u_3 et u_4.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$

   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant v_n \leqslant 1$$

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   b. En déduire le sens de variations de la suite (v_n).

4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).
   Quelle est la limite de la suite (u_n) ?