Sujet 1

1- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère le plan P d'équation $x + y + z - 3 = 0$ ainsi que le point M (2; -3; 1).

a) Le point M est-il dans le plan P ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par M et orthogonale à P.

c) Déterminer les coordonnées du point H intersection de D et P.

d) En déduire la distance du point M au plan P.

2- Calculer $I = \int_1^2 (2x+1)e^x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Réponses

1. a) $x_M + y_M + z_M - 3 = 2 - 3 + 1 - 3 = -3 \neq 0$ donc $M \notin$ P.

b) $\vec{n}$ (1; 1; 1) est un vecteur normal de P, la droite D passant par M et orthogonale à P admet donc comme représentatation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

c) Comme $H \in$ D, il existe un réel t tel que H ait pour coordonnées $(2 + t; -3 + t; 1 + t)$. Comme de plus $H \in$ P, ces coordonnées vérifient l'équation de P donc $2 + t - 3 + t + 1 + t - 3 = 0$, soit $3t - 3 = 0$ et donc $t = 1$. On a ainsi H(3; -2; 2).

d) La distance du point M au plan P est HM. On a $\overrightarrow{HM}$ (-1; -1; -1) donc $HM = \sqrt{3}$

2. On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^x$.

Comme $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$, on a

I = $[(2x+1)e^x]_1^2 - \int_1^2 2e^x\,dx$ = $[(2x+1)e^x]_1^2 - [2e^x]_1^2$ = $5e^2 - 3e - (2e^2 - 2e) = 3e^2 - e$.

Sujet 2

1- On considère la suite u_n définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\sqrt{10\ u_n}$. Déterminer sa limite en utilisant au choix l'une des deux méthodes suivantes.

a) Méthode 1

On pose $v_n=\ln u_n-\ln 10$. Montrer que v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire les expressions de v_n et de u_n en fonction de *n*, puis la limite de u_n.

b) Méthode 2

Montrer que la suite u_n est croissante, puis qu'elle est majorée par 10. Que peut-on en déuire ? Calculer la limite de u_n.

2- Ecrire le nombre complexe $z=1+i\sqrt{3}$ sous sa forme exponentielle. En déduire la forme algébrique de z^5.

Réponses

1. a) $v_{n+1}=\ln(\sqrt{10u_n})-\ln 10=\frac{1}{2}\ln 10+\frac{1}{2}\ln u_n-\ln 10=\frac{1}{2}(\ln u_n-\ln 10)=\frac{1}{2}v_n$. La suite v_n est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=\ln 2-\ln 10=-\ln 5$. On en déduit que $v_n=-\ln 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $\ln u_n = v_n + \ln 10$, on a $u_n=10\ e^{v_n}$. Enfin, comme la limite de v_n est 0, la limite de u_n est $10e^0 = 10$.

b) La fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{10\,x}$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

On montre par récurrence que pour tout *n*, $u_n < u_{n+1}$.

On a $u_0 = 2$ et $u_1=\sqrt{20}$. Donc $u_0 < u_1$. Supposons que $u_n < u_{n+1}$. Comme *f* est croissante, on a $f(u_n) < f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1} < u_{n+2}$. Ce ci montre que pour tout *n*, $u_n < u_{n+1}$, donc que u_n est croissante.

On montre par récurrence que pour tout *n*, $u_n < 10$.

On a $u_0 = 2$, donc $u_0 < 10$. Supposons que $u_n < 10$. Comme *f* est croissante, $f(u_n) < f(10)$, donc $u_{n+1} < 10$. Ce qui montre que pour tout *n*, $u_n < 10$.

La suite u_n est croissante et majorée, elle converge donc vers une limite *L*. Comme $u_{n+1}=\sqrt{10\ u_n}$, on a $L=\sqrt{10L}$, donc $L = 0$ ou $L = 10$. Comme tous les u_n sont supérieurs à 2, la limite ne peut pas être 0, c'est donc 10.

2. $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$. Alors $|z^5| = 2^5 = 32$ et $\arg(z^5) = \frac{5\pi}{3}$.

On a donc $z^5=32\ (\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})=32(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=16-16\ i\sqrt{3}$.

Sujet 3

1- Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x)$.

a) Dresser le tableau de variations de g, avec les limites.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique α, puis déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

c) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2+(\ln x)^2$. Montrer que f admet un minimum pour $x=\alpha$.

2- On lance une pièce de monnaie 10 fois de suite. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre d'apparitions de PILE.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer E(X), l'espérance mathématique de X.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 5 fois PILE ?

Réponses

1. a) $g'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$. Comme $2x^2+1$ et x sont positifs sur $]0\,;+\infty[$, $g'(x)$ l'est aussi et la fonction g est croissante.

Quand x tend vers 0, x^2 tend vers 0 et $\ln x$ tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend donc vers $-\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, x^2 et $\ln x$ tendent aussi vers $+\infty$, $g(x)$ tend donc vers $+\infty$.

b) La fonction g est continue, croissante et change de signe dans $]0\,;+\infty[$; d'après le th. des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions monotones, il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Avec la calculette on trouve que $g(0{,}6) < 0$ et $g(0{,}7) > 0$; on en déduit que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$. On trouve ensuite que $g(0{,}65) < 0$ et $g(0{,}66) > 0$, donc $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

c) $f'(x)=2x+2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2x^2+2\ln x}{x}=\frac{2g(x)}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, x est positif, $f'(x)$ a donc le même signe que $g(x)$. Ainsi f' est négatif sur $]0;\alpha[$ et positif sur $]\alpha;+\infty[$. On a bien un minimum de f en $x = \alpha$.

2. a) X sui la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$.

On a donc $P(X=k)=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}=\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{k}$.

b) E(X) = $10\times\frac{1}{2}$ = 5.

c) P(X=5) = $\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{5}=\frac{252}{1024}\approx 0{,}246$.

Sujet 4

1- On pose $\omega=e^{2i\frac{\pi}{5}}$.

a) Calculer ω^5 et prouver que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$ (on pourra remarquer qu'il s'agit de la somme des premiers termes d'une suite géométrique)

b) Soient $u=\omega+\omega^4$ et $v=\omega^2+\omega^3$. Montrer que $u+v=-1$ et $uv=-1$. Endéduire *u* et *v*.

c) En justifiant l'égalité $u=\omega+\overline{\omega}$, utiliser le résultat précédent pour calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$.

2- On considère la fonction *f* définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}\,e^{1-x}$.

a) Montrer que $f(x)=\frac{e}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{e^x}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Réponses

1. a) $\omega^5=e^{2i\pi}=1$.

$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4$ est la somme des 5 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison ω. On a donc $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=\frac{1-\omega^5}{1-\omega}=0$.

b) $u+v=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4-1=-1$.

$uv=(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3)=\omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7=\omega^3(1+\omega+\omega^3+\omega^4)$.

Or $1+\omega+\omega^3+\omega^4=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4-\omega^2=-\omega^2$, donc $uv=\omega^3\times(-\omega^2)=-\omega^5=-1$.

Comme $u+v=-1$, $u=-1-v$; comme $uv=-1$, on obtient $(-1-v)v=-1$, soit $v^2+v-1=0$.

On en déduit que soit $v=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, soit $v=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $u=\omega+\omega^4$ est un réel positif, on a obligatoirement $u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $v=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

c) $\omega^4=\frac{\omega^5}{\omega}=\frac{1}{\omega}=\overline{\omega}$, donc $u=\omega+\overline{\omega}$. Comme $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\omega+\overline{\omega}=2\cos\frac{2\pi}{5}$.

On a donc finalement, $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{u}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

2. a) $f(x)=\sqrt{x}\,e^{1-x}=\frac{e\sqrt{x}}{e^x}=\frac{ex}{e^x\sqrt{x}}=\frac{e}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{e^x}$.

b) Lorsque *x* tend vers +∞, $\frac{e}{\sqrt{x}}$ et $\frac{x}{e^x}$ tendent vers 0, donc *f*(*x*) tend vers 0.

Sujet 5

1- On considère l'équation différentielle : (E1): $y'-y=3e^{-2x}$.

a) Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=u(x)e^{-2x}$.

Démontrer que la fonction v est solution de (E1) si, et seulement si, la fonction u est solution de l'équation différentielle (E2) : $y'-3y=3$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E2).

c) En déduire l'unique solution f de l'équation différentielle (E1) vérifiant $f(0)=-3$.

2- *ABCD* est un carré. Les points I et J sont définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Démontrer que les droites (DI) et (JC) sont orthogonales.

Réponses

1. a) $v'(x) = u'(x)e^{-2x} - 2u(x)e^{-2x}$.

v est solution de (E1) $\Leftrightarrow v'(x) - v(x) = 3e^{-2x} \Leftrightarrow e^{-2x}(u'(x) - 2u(x) - u(x)) = 3e^{-2x}$

$\Leftrightarrow u'(x) - 3u(x) = 3 \Leftrightarrow u$ solution de (E2) : $y' - 3y = 3$.

b) Les solutions de (E2) sont de la forme $u(x) = ke^{3x} - 1$.

c) f solution de (E1) $\Leftrightarrow u(x) = f(x)e^{2x}$ est solution de (E2) $\Leftrightarrow f(x) = (ke^{3x} - 1)e^{-2x}$.

Comme $f(0) = -3$, $k - 1 = -3$, donc $k = -2$. D'où $f(x) = (-2e^{3x} - 1)e^{-2x}$.

2. On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CJ}$.

$\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CJ}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ})=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DJ}$.

Or $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}DA^2$ et $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CD}=-\frac{2}{3}AB^2=-\frac{2}{3}DA^2$.

On a donc finalement $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$, ce qui montre que les droites (DI) et (JC) sont orthogonales.

Sujet 6

1- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les droites *D*, D_1 et D_2 de représentations paramétriques :

$$D : \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases}, D_1 : \begin{cases} x = 6t \\ y = 2-2t \\ z = 5-4t \end{cases}, D_2 : \begin{cases} x = 7+2t \\ y = 2+2t \\ z = -6-t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Etudier la position relative des droites *D* et D_1, puis *D* et D_2, et enfin D_1 et D_2.

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = e^x$)

Réponses

1. *D* admet le vecteur $\vec{u}$ (-3; 1; 2) comme vecteur directeur.

D_1 admet le vecteur $\vec{v}$ (6; -2; -4) comme vecteur directeur.

Comme $\vec{v} = -2\vec{u}$, les droites *D* et D_1 sont parallèles. Voyons si elles sont confondues ?

M(2; 1; -3) est un point de *D*.

Pour voir si *M* est aussi sur D_1 on cherche un réel *t* tel que $\begin{cases} 2 = 6t \\ 1 = 2-2t \\ -3 = 5-4t \end{cases}$.

Comme un tel réel n'existe pas, *D* et D_1 ne sont pas confondues, elles sont strictement parallèles.

Pour trouver un point commun à *D* et D_2, on résoud le système $\begin{cases} 2-3t = 7+2t' \\ 1+t = 2+2t' \\ -3+2t = -6-t' \end{cases}$.

Ce système admet comme unique solution *t* = -1 et *t'* = -1. *D* et D_2 sont donc sécantes au point *N* de coordonnées (5; 0; -5).

Pour trouver un point commun à D_1 et D_2, on résoud le système $\begin{cases} 6t = 7+2t' \\ 2-2t = 2+2t' \\ 5-4t = -6-t' \end{cases}$.

Ce système n'a pas de solution, donc D_1 et D_2 n'ont pas de point commun. Elles ne peuvent pas être parallèles car sinon *D* et D_2 le serait. D_1 et D_2 sont donc deux droites non coplanaires.

2. En posant X = e^x, on obtient l'équation $X^2 - 2X - 3 = 0$. Cette équation admet deux solutions qui sont $X_1 = 3$ et $X_2 = -1$.

Pour que x soit solution de l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$, il faut donc que $e^x = 3$ ou $e^x = -1$.

Comme une exponentielle est toujours positive, il faut donc que $e^x = 3$ soit $x = \ln 3$.

Sujet 7

1- Soit la suite I_n définie pour $n > 0$ par : $I_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$.

a) Etudier le sens de variation de I_n .

b) Montrer que pour tout x de [0 ; 1], on a : $\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{1+e^x}\leqslant\frac{1}{2}$

c) En déduire un encadrement de I_n et la limite de I_n .

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.
Ecrire ses solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Réponses

1. a) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}-e^{nx}}{1+e^x}dx$. Comme $e^{(n+1)x}-e^{nx}=e^{nx}(e^x-1)$ et comme $e^x\geqslant 1$ sur [0; 1], on a une intégrale de 0 à 1 d'une fonction positive, elle est donc positive. Ainsi $I_{n+1} - I_n > 0$; la suite I_n est croissante.

b) $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant e^x \leqslant e \Rightarrow 2 \leqslant 1 + e^x \leqslant 1 + e$, et comme $1 + e < 4$, on obtient $2 \leqslant 1 + e^x \leqslant 4$ et en passant aux inverses $\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{1+e^x}\leqslant\frac{1}{2}$.

c) L'encadrement précédent nous permet d'écrire $\frac{e^{nx}}{4}\leqslant\frac{e^{nx}}{1+e^x}\leqslant\frac{e^{nx}}{2}$. En intégrant de 0 à 1 on obtient $\int_0^1 \frac{e^{nx}}{4}dx\leqslant I_n\leqslant\int_0^1 \frac{e^{nx}}{2}dx$.

$\frac{e^{nx}}{n}$ étant une primitive de e^{nx}, on a $\int_0^1 e^{nx}dx=\left[\frac{e^{nx}}{n}\right]_0^1=\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}$. D'où l'encadrement

$\frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right)\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{e^n}{n}$ tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{n}$ tend vers 0, donc $\frac{1}{4}\left(\frac{e^n}{n}-\frac{1}{n}\right)$ tend vers $+\infty$. Comme I_n est supérieure à une suite qui tend vers $+\infty$, I_n tend aussi vers $+\infty$.

2. Le discriminant du trinôme vaut -8, on a donc deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. Leur module est 2.

D'où $z_1=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Sujet 8

1- Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points *A* d'affixe a et *B* d'affixe b.

On appelle *M* le milieu de [*AB*], *E* l'image de *A* par la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et *F* l'image de *B* par la rotation de centre *O* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les affixes de *M*, *E* et *F* en fonction de a et b.

b) Etablir une relation entre les affixes des vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{OM}$.

c) En déduire que $OM = \frac{1}{2} EF$, puis que les droites (*OM*) et (*EF*) sont orthogonales.

2- Dresser le tableau de variations de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Réponses

1. a) $z_M = \frac{a+b}{2}$; $z_E = a e^{i\frac{\pi}{2}} = ai$; $z_F = b e^{-i\frac{\pi}{2}} = -bi$.

b) $z_{\overrightarrow{FE}} = z_E - z_F = ai + bi = i(a+b)$ et $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M - z_O = \frac{a+b}{2}$. Ainsi $z_{\overrightarrow{FE}} = 2i z_{\overrightarrow{OM}}$.

c) $EF = |z_{\overrightarrow{EF}}| = |2\mathrm{i}| \times |z_{\overrightarrow{OM}}| = 2\ OM$ d'où $OM = \frac{1}{2} EF$.

$(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{FE}) = arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{FE}}}{z_{\overrightarrow{OM}}}\right) = arg(2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$ donc (*OM*) et (*EF*) sont orthogonales.

2. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. *f* '(*x*) a donc le même signe que 1 – ln *x*. Or ln *x* > 1 pour *x* > *e* et ln *x* < 1 pour *x* < *e*.
f est donc croissante sur]0; *e*[et décroissante sur]*e*; +∞[.
Lorsque *x* tend vers 0 par valeurs positives, ln *x* tend vers -∞ et $\frac{1}{x}$ tend vers +∞, *f* (*x*) tend donc vers -∞. Lorsque *x* tend vers +∞, $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1/e$	↘	0

Sujet 9

1- Une urne U_1 contient 5 boules rouges et trois boules vertes; une urne U_2 contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.

On choisit l'une de ces deux urnes au hasard, puis on prélève au hasard une boule dans cette urne.

a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

b) La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

2- On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ et $h(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

a) Donner une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ si u est une fonction dérivable strictement positive.

b) Utiliser le résultat précédent pour calculer $I_1=\int_0^1 g(x)\,dx$.

c) Soit $I_2=\int_0^1 h(x)\,dx$. Calculer I_1+I_2 et en déduire I_2 .

Réponses

1. a) La probabilité de tirer une boule rouge est $P(R) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2)$, d'où

$P(R) = P(U_1)\times P_{U_1}(R)+P(U_2)\times P_{U_2}(R)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{33}{80}$.

b) Si la boule tirée est rouge, la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 est

$$P_R(U_1)=\frac{P(U_1\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{5}{16}}{\frac{33}{80}}=\frac{25}{33}$$

2. a) $\ln u$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ lorsque u est strictement positive.

b) $g(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{1+x^2}$ est de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + x^2$ et admet donc $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ comme primitive. Ainsi $I_1=\int_0^1 g(x)\,dx=\left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\dfrac{\ln 2}{2}$.

Sujet 10

1- A l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3mL d'un médicament.
Une étude du processus d'élimination de ce médicament a permis d'observer que la quantité $f(t)$, exprimée en mL, de médicament encore présente dans le sang du patient à l'instant t, exprimé en heures, est solution de l'équation différentielle $y' = -0{,}1\,y$.
a) Exprimer $f(t)$ en fonction de t.
b) Etudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$, puis donner l'allure de sa courbe représentative.
c) Au bout de combien de temps le sang du patient contient-il moins de 0,5mL de médicament ?

2- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on appelle H le projeté orthogonal du point $A(-1; 3; 5)$ sur la droite D passant par $B(0; -3; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-2\,;-1)$.
a) Démontrer qu'il existe un réel a tel que $\overrightarrow{BH}=a\vec{u}$.
b) Déterminer les coordonnées de H.

Réponses

1. a) Les solutions de l'équation différentielle $y' = -0{,}1\,y$ sont de la forme $f(t) = ke^{-0{,}1t}$.
Comme $f(0) = 3$, $k = 3$, donc $f(t) = 3e^{-0{,}1t}$.
b) $f'(t) = -0{,}1\,f(t)$, comme $f(t)$ est positive, $f'(t)$ est négative et f est donc décroissante.
Lorsque t tend vers $+\infty$, $f(t)$ tend vers 0.

c) $f(t) < 0{,}5 \Leftrightarrow 3e^{-0{,}1t} < 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-0{,}1t} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow -0{,}1t < -\ln 6 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 6}{0{,}1} \Leftrightarrow t > 10\ln 6$.
Il faudra donc attendre au moins 17,9 h pour que le sang du patient contienne moins de 0,5mL de médicament.
2. a) $H \in$ D donc $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et il existe un réel a tel que $\overrightarrow{BH}=a\vec{u}$.
b) De $\overrightarrow{BH}=a\vec{u}$ on déduit les coordonnées de H en fonction de a : $H(a; -3-2a; 4-a)$. Ensuite on obtient $\overrightarrow{AH}\,(a+1; -2a-6; -a-1)$. Comme (AH) est orthogonale à D, on a $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$.
Ainsi $a + 1 - 2(-2a - 6) - (-a - 1) = 0$, soit $6a + 14 = 0$, d'où $a = \frac{-7}{3}$. Les coordonnées de H sont donc $\left(\frac{-7}{3}\,;\frac{5}{3}\,;\frac{19}{3}\right)$

Sujet 11

1- Le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$. On appelle z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre.

b) Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Calculer l'affixe z_3 du point C tel que ABC soit un triangle equilatéral direct. (on pourra utiliser une rotation).

c) Calculer le périmètre et l'aire de ABC.

2- Soit f la fonction définie sur I =]1 ; +∞ [par $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 4x - 3}{x - 1}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

b) En déduire les primitives de f sur I.

c) Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(2) = 0$.

Réponses

1. a) Le discriminant du trinôme est - 48, il y a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-4 + i\sqrt{48}}{2} = \dfrac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$.

b) C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On a donc :

$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4i\sqrt{3}) = -2i\sqrt{3} + 6$ et donc $z_C = 4$.

c) On a $AB = |z_B - z_A| = 4\sqrt{3}$. Comme ABC est équilatéral, son périmètre est $3AB = 12\sqrt{3}$.

Appelons I le milieu de $[AB]$; l'affixe de I est $z_I = -2$ et $CI = 6$.

L'aire de ABC est $\dfrac{AB \cdot CI}{2} = \dfrac{4\sqrt{3} \times 6}{2} = 12\sqrt{3}$.

2. a) $ax + b + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{ax^2 + x(b-a) + c - b}{x-1}$. Pour que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, il suffit que

$\begin{cases} a = -3 \\ b - a = 4 \\ c - b = -3 \end{cases}$, donc que a = -3, b = 1 et c = -2, ce qui donne $f(x) = -3x + 1 - \dfrac{2}{x-1}$.

b) Les primitives de f sont de la forme $F(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + x - 2\ln(x-1) + C$, où C est une constante réelle.

c) Si $F(2) = 0$, $-6 + 2 - 2\ln 1 + C = 0$, donc $C = 4$ et $F(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + x - 2\ln(x-1) + 4$

Sujet 12

1- Soit P le polynôme tel que P(x)= x^3 - 3x^2 - 4x + 12.

a) Montrer que 3 est une racine de P, puis déterminer les réels a, b et c tels que

$$P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c).$$

b) Résoudre l'équation P(x) = 0.

c) En déduire les solutions des équations :

- $(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 4\ln x + 12 = 0$
- $e^{2x} - 3e^x - 4 + 12e^{-x} = 0$

2- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère le plan P d'équation $-x + y - 2z = -4$ et le plan P' d'équation $x + y + z = 11$.

a) Montrer que les plans P et P' sont sécants.

b) Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection de ces deux plans.

Réponses

1. a) P(3) = 27 – 27 – 12 + 12 = 0.

$(x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + x^2(b - 3a) + x(c - 3b) - 3c$.

Pour que P(x) = $(x - 3)(ax^2 + bx + c)$, il suffit donc qu'on ait à la fois $a = 1$, $b - 3a = -3$, $c - 3b = -4$ et $-3c = 12$, ce qui se produit lorsque $a = 1$, $b = 0$ et $c = -4$.

Ainsi P(x) = $(x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$.

b) P(x) = 0 pour $x = 3$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.

c) i) On pose X = ln x; l'équation $(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 4\ln x + 12 = 0$ donne P(X) = 0.

On a donc soit ln x = 3 d'où $x = e^3$, soit ln x = 2 d'où $x = e^2$, soit ln x = -2 d'où $x = e^{-2}$.

ii) On pose X = e^x; l'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 + 12e^{-x} = 0$ donne P(X) = 0.

On a donc soit $e^x = 3$ d'où x = ln 3, soit $e^x = 2$ d'où x = ln 2, soit $e^x = -2$ ce qui n'est pas possible.

2. a) P admet $\vec{n}$ (-1; 1; -2) comme vecteur normal, et P' admet $\vec{n'}$ (1; 1; 1) comme vecteur normal.

Il n'existe pas de réel k tel que $\vec{n'} = k\vec{n}$, ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires et les plans P et P' sont donc sécants.

b) Les points se trouvant à la fois sur P et sur P' vérifient $\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ x + y + z = 11 \end{cases}$.

En posant $z = t$, cela équivaut à $\begin{cases} -x + y = -4 + 2t \\ x + y = 11 - t \\ z = t \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x = 15 - 3t \\ 2y = 7 + t \\ z = t \end{cases}$.

On obtient ainsi une représentation paramétrique de la droite intersection de P et P' :

$\begin{cases} x = \frac{15}{2} - \frac{13}{2}t \\ y = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$. Cette droite passe par M $\left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2}, 0\right)$ et admet $\vec{u}\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2, 1}\right)$ comme vecteur directeur.

Sujet 13

1- Soit *f* la fonction définie sur]-2; +2[par $f(x)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

a) Montrer que *f* est impaire.

b) Etudier les variations de *f* et calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

c) Soit C la courbe représentative de *f*. Déterminer ses asymptotes, puis une équation de sa tangente en 0. Donner l'allure de la courbe C.

2- Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- $z_1=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$
- $z_2=\frac{5-i}{3+2\mathrm{i}}$.

Réponses

1. a) $f(-x)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=-f(x)$ donc *f* est impaire.

b) Soit $u(x) = \frac{2+x}{2-x}$; on a $u'(x) = \frac{4}{(2-x)^2}$.

Comme $f(x) = \frac{1}{3}\ln(u(x))$, $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{(2-x)^2}\times\frac{2-x}{2+x}=\frac{4}{3(2-x)(2+x)}$.

Sur]-2; 2[, $(2 - x)(2 + x)$ est toujours positif, donc $f'(x)$ est toujours positif et *f* est croissante.

Lorsque *x* tend vers -2 par valeurs supérieures, $\frac{2+x}{2-x}$ tend vers 0 et donc $f(x)$ tend vers -∞. Par symétrie, lorsque *x* tend vers 2 par valeurs inférieures, $f(x)$ tend vers +∞.

c) Les limites en -2 et 2 permettent d'affirmer l'existence de deux asymptotes verticales d'équations x = -2 et x = 2. Le coefficient directeur de la tangente en 0 est $f'(0) = \frac{1}{3}$. Comme $f(0) = 0$, l'équation de la tangente en 0 est $y=\frac{1}{3}x$.

2. a) $|z_1| = \sqrt{8}=2\sqrt{2}$ donc $z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$.

Si θ = arg(z1) on a $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-1}{2}$ donc $\theta = \frac{-\pi}{6}$.

b) $z_2=\frac{5-i}{3+2\mathrm{i}}=\frac{(5-i)(3-2\mathrm{i})}{13}=\frac{13-13\mathrm{i}}{13}=1-i$ d'où $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = \frac{-\pi}{4}$.

Sujet 14

1- Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=e^{-x^2}$. On ne connait pas de primitive de f, mais on se propose de chercher un encadrement de $I=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

a) Vérifier que pour tout x de ℝ, $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$.

b) Montrer que pour tout t de [0; 1] : $-2t\leqslant f'(t)\leqslant\frac{-2}{e}t$.

c) En déduire un encadrement de f sur [0; 1], puis un encadrement de I.

2- On considère le nombre complexe $z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

a) Ecrire z^2 sous forme algébrique.

b) Déterminer le module et un argument de z^2, puis en déduire le module et un argument de z.

Réponses

1. a) Comme f est une primitive de f', $\int_0^x f'(t)\,dt=[f(t)]_0^x=f(x)-f(0)$, on a donc bien $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$.

b) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$. f' est donc négative sur [0; 1] et f est décroissante sur cet intervalle.
Ainsi, $0\leqslant t\leqslant 1\Rightarrow e^{-1}\leqslant e^{-t^2}\leqslant 1$. En multipliant par $-2t$ qui est négatif, on en déduit que $-2t\leqslant -2te^{-t^2}\leqslant\frac{-2}{e}t$, soit $-2t\leqslant f'(t)\leqslant\frac{-2}{e}t$.

c) En intégrant l'encadrement précédent de 0 à x avec $x\leqslant 1$, on obtient $\int_0^x -2t\,dt\leqslant\int_0^x f'(t)\,dt\leqslant\int_0^x\frac{-2}{e}t\,dt$, soit $-x^2\leqslant f(x)-f(0)\leqslant -\frac{x^2}{e}$ et finalement $1-x^2\leqslant f(x)\leqslant 1-\frac{x^2}{e}$. En intégrant ce nouvel encadrement de 0 à 1 on obtient $\int_0^1(1-x^2)\,dx\leqslant\int_0^1 f(x)\,dx\leqslant\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{e}\right)dx$, soit $\frac{2}{3}\leqslant I\leqslant 1-\frac{1}{3e}$.

2. a) $z^2=(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2+2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=4+2\sqrt{3}-(4-2\sqrt{3})+4i=4\sqrt{3}+4i$.

b) $|z^2|$ = 8 donc $z^2=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ et $\arg(z^2)=\frac{\pi}{6}$.

On en déduit que $|z|^2 = 8$ et donc que $|z|=\sqrt{8}$, puis que $2\arg(z)=\frac{\pi}{6}$ à $2k\pi$ près, ainsi on a soit $\arg(z)=\frac{\pi}{12}$, soit $\arg(z)=\frac{\pi}{12}+\pi$. Comme la partie réelle de z est positive, $\arg(z)=\frac{\pi}{12}$.

Sujet 15

1- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les plans :

- P_1 d'équation $x - z + 1 = 0$
- P_2 d'équation $y - 2z - 2 = 0$.

a) Montrer que P_1 et P_2 sont sécants. Sont-ils orthogonaux ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A(-4; -3; 2) et parallèle à la droite D intersection des plans P_1 et P_2.

2- Soit f la fonction définie sur D= $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

a) Montrer que pour tout x de D, $f(x) f(-x) = -1$.

b) Etudier la limite de f en $+\infty$, puis en déduire celle en $-\infty$.

c) Montrer que pour tout x de D autre que 1 ou -1, $f'(x)$ a le même signe que $f(x)$. En déduire les variations de f.

Réponses

1. a) P_1 admet $\vec{n_1}$ (1; 0; -1) comme vecteur normal et P_2 admet $\vec{n_2}$ (0; 1; -2) comme vecteur normal. $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires, donc P_1 et P_2 sont sécants. Comme $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 2$, P_1 et P_2 ne sont pas orthogonaux.

b) Soit $\vec{u}$ (x, y, z) un vecteur directeur de D. On a $\vec{n_1} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n_2} \cdot \vec{u} = 0$, ce qui donne le système $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$. En choisissant $z = 1$, on a alors $y = 2$ et $x = 1$. D'où $\vec{u}$ (1; 2; 1) est un vecteur directeur de D. Comme D passe par A(-4; -3; 2), on en déduit la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 4 \\ y = 2t - 3 \\ z = t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a) $f(x) f(-x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})(-x + \sqrt{x^2 - 1}) = x^2 - 1 - x^2 = -1$.

b) Lorsque x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x^2 - 1}$ tend aussi vers $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, donc $f(-x)$ tend vers $+\infty$. Comme $f(x) = \frac{-1}{f(-x)}$, on en déduit que $f(x)$ tend vers 0.

c) $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$. f' et f ont donc même signe.

Si $x > 0$, $f(x)$ est somme de deux nombres positifs, donc $f(x) > 0$.

Si $x < 0$, $f(x) = \frac{-1}{f(-x)}$ avec $f(-x)$ positif, donc $f(x) < 0$.

On en déduit que f est décroissante de 0 à -1 sur]-∞; -1[et croissante de 1 à +∞ sur]1; +∞[.

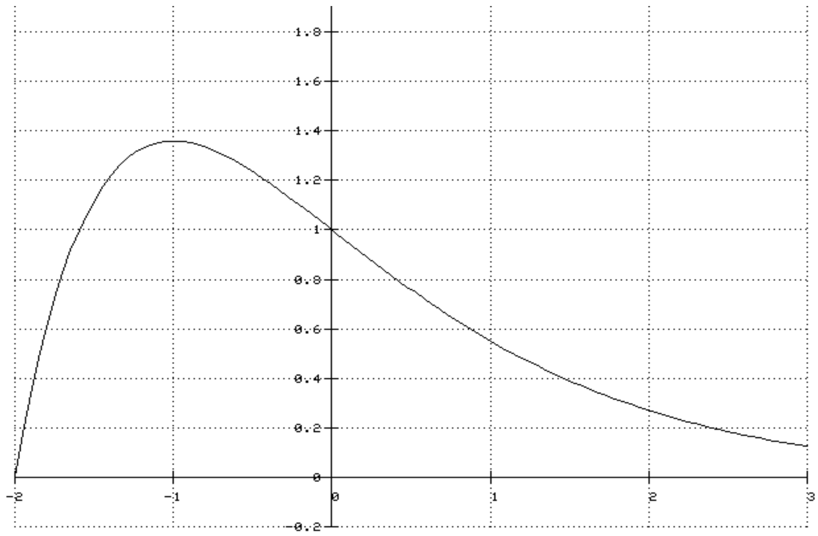
Sujet 17

1- La figure donne la représentation graphique de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=(ax+b)e^{cx}$, où a, b et c sont des réels à déterminer.

a) La courbe passe par les points A(-2; 0) et B(0; 1). Calculer a et b.

b) Au point C d'abscisse -1, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Calculer c.

c) Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote.



d) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = x + 2$.

2- Ecrire le nombre complexe $\sqrt{3}-i$ sous forme exponentielle.
En déduire la forme algébrique de $(\sqrt{3}-i)^7$

Réponses

1. a) La courbe passe par B(0; 1) donc $f(0) = 1$, soit $b = 1$. La courbe passe aussi par A(-2; 0) donc $f(-2) = 0$, soit $b = 2a$, d'où $a = \frac{1}{2}$. Ainsi $f(x)=(\frac{1}{2}x+1)e^{cx}$.

b) Le coefficient directeur de la tangente en C est 0, donc $f'(-1) = 0$.
Or $f'(x) = ae^{cx} + (ax + b)e^{cx} = e^{cx}(a + bc + acx)$. Comme $f'(-1) = 0$, a + bc – ac = 0, donc $c=\frac{-a}{b-a}=-1$. Ainsi $f(x)=(\frac{1}{2}x+1)e^{-x}$.

c) $f(x)=(\frac{1}{2}x+1)e^{-x}=\frac{1}{2}xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}$. Lorsque x tend vers +∞, e^{-x} et xe^{-x} tendent vers 0, donc $f(x)$ tend vers 0 et l'axe des abscisses est bien une asymptote.

d) f(x) = x + 2 ⇔ $(\frac{1}{2}x+1)e^{-x}=2(\frac{1}{2}x+1)$ ⇔ $(\frac{1}{2}x+1)(e^{-x}-2)=0$. On a donc deux solutions, soit $\frac{1}{2}x+1=0$ et $x = -2$, soit $e^{-x} = 2$ et $x = -\ln 2$.

2. $\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $(\sqrt{3}-i)^7=2^7\,e^{-i\frac{7\pi}{3}}=32\,e^{-i\frac{\pi}{3}}=32\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=16\sqrt{3}-16\,i$

Sujet 18

1- Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes indiscernables au toucher.
a) On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir :

- 2 rouges
- 2 jaunes
- 2 vertes
- 2 boules de couleurs différentes

b) Mêmes questions si l'on effectue des tirages avec remise (on remet dans l'urne la boule issue du premier tirage).

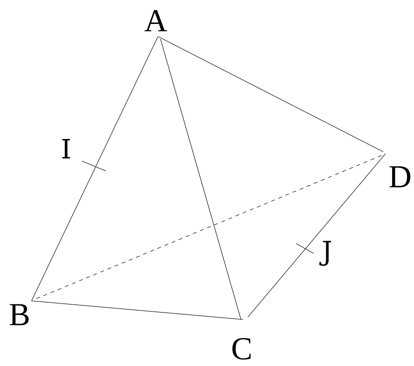
2- Calculer $F(x)=\int_1^x t\ln t\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
Déterminer ensuite $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Réponses

1. a) Nombre de tirages possibles de 2 boules sans remise : 10 × 9 = 90.
Nombre de tirages de 2 boules rouges : 5 × 4 = 20, d'où la probabilité $\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$.
Nombre de tirages de 2 boules jaunes : 3 × 2 = 6, d'où la probabilité $\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.
Nombre de tirages de 2 boules vertes : 2 × 1 = 2, d'où la probabilité $\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$.
La probabilité de tirer deux boules de même couleur est $\frac{20}{90}+\frac{6}{90}+\frac{2}{90}=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}$, celle de tirer deux boules de couleurs différentes est donc $1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$.
b) S'il y a remise, le nombre de tirages possibles est 10 × 10 = 100. La probabilité de tirer deux boules rouges est $\frac{5\times 5}{100}=\frac{1}{4}$; celle de tirer deux boules jaunes est $\frac{3\times 3}{100}=\frac{9}{100}$; celle de tirer deux boules vertes est $\frac{2\times 2}{100}=\frac{1}{25}$. Enfin la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est $1-\frac{1}{4}-\frac{9}{100}-\frac{1}{25}=\frac{62}{100}=\frac{31}{50}$.
2. On pose $u(t)$ = ln t, d'où $u'(t)$ = $\frac{1}{t}$, et $v'(t) = t$, d'où $v(t)$ = $\frac{t^2}{2}$. En effectuant une intégration par parties on obtient $F(x)=\int_1^x t\ln t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\frac{t}{2}\,dt=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}$.
Si x tend vers +∞, $F(x)$ tend vers +∞.

Sujet 19

1- $ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a.
I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$



a) Calculer les produits scalaires $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ et $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$.
En déduire $\vec{AB}\cdot\vec{CD}$. Que peut-on alors dire des droites (AB) et (CD) ?

b) Vérifier que $\vec{IJ}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{CD}$. En déduire que la droite (IJ) est orthogonale aux droites (AB) et (CD).

c) Exprimer la distance IJ en fonction de a.
(on pourra utiliser le triangle AIJ)

2- Résoudre l'équation $2(\ln x)^2-\ln x-6=0$, puis l'inéquation $2(\ln x)^2-\ln x-6>0$.
(on pourra utiliser le changement de variable X= ln x)

Réponses

1. a) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=AB\cdot AI=\frac{a^2}{2}$; $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=AB\cdot AI=\frac{a^2}{2}$.

$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=\vec{AB}(\vec{CA}+\vec{AD})=\vec{AB}\cdot\vec{CA}+\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\frac{-a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$. (AB) et (CD) sont orthogonales.

b) $\vec{IJ}=\vec{IB}+\vec{BC}+\vec{CJ}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{CD}$.

Ainsi $\vec{AB}\cdot\vec{IJ}=\frac{AB^2}{2}+\vec{AB}\cdot\vec{BC}+\frac{\vec{AB}\cdot\vec{CD}}{2}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0$

et $\vec{CD}\cdot\vec{IJ}=\frac{\vec{CD}\cdot\vec{AB}}{2}+\vec{CD}\cdot\vec{BC}+\frac{CD^2}{2}=0-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

La droite (IJ) est donc orthogonale à (AB) et (CD).

b) AIJ est rectangle en I, donc $IJ^2 = AJ^2 - AI^2$. AJD est rectangle en J, $AJ^2 = AD^2 - JD^2 = \frac{3a^2}{4}$.

Finalement $IJ^2 = \frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$ et $IJ=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2. En posant X = ln x on obtient le trinôme $2X^2 - X - 6$ qui a deux racines 2 et $\frac{-3}{2}$, il peut donc être factorisé en $(2X + 3)(X - 2)$.

Ainsi $2(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow (2\ln x + 3)(\ln x - 2) = 0$. Donc soit $\ln x = 2$ et $x = e^2$, soit $\ln x = \frac{-3}{2}$ et $x = e^{\frac{-3}{2}}$.

$2X^2 - X - 6$ est positif à l'extérieur des racines donc pour $x < e^{\frac{-3}{2}}$ ou $x > e^2$.

Sujet 20

1- On considère les nombres complexes $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ et $Z = z_1 z_2$.

a) Ecrire ces trois nombres sous forme trigonométrique.

b) Déterminer la forme algébrique de *Z*.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

2- On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx$.

a) Calculer *I* + *J*.

b) En utilisant l'égalité $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, vérifier que $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer *I* - *J*.

d) En déduire *I* et *J*.

Réponses

1. a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{5i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = 1\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\, e^{5i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

b) $Z =$ $(-1-i)(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c) $Z =$ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ donc $\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

2. a) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos^2 x + x\sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$.

b) $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos^2 x - x\sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\, dx$.

c) Soit $u(x) = x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \cos 2x$ d'où $v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$. Par intégration par parties,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\, dx = \left[\frac{x\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx = 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2}$.

d) En ajoutant *I* + *J* et *I* – *J* on obtient 2*I*, donc $I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$. On en déduit ensuite que $J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$

Sujet 21

1- Soit u_n la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+5$.

a) Calculer u_1 et u_2 .

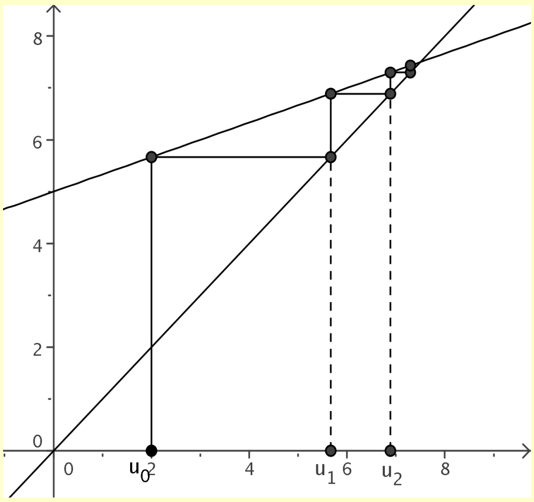
b) Tracer les droites d'équations $y=\frac{1}{3}x+5$ et $y=x$. Utiliser la figure obtenue pour retrouver u_1 et u_2 . Que suggère la figure sur le comportement de la suite u_n ?

c) Soit v_n la suite définie par $v_n=u_n+h$. Déterminer *h* pour que v_n soit géométrique de rapport $\frac{1}{3}$.

d) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de *n*. En déduire la limite de u_n .

2- L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Déterminer les points d'intersection du plan P d'équation $x+2y-z+2=0$ et de la droite D passant par A(2; 1; -4) et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-2;4)$.

Réponses



1. a) $u_0 = 2$; $u_1=\frac{1}{3}\times 2+5=\frac{17}{3}$;
$u_2=\frac{1}{3}\times\frac{17}{3}+5=\frac{68}{9}$.

b) La suite semble converger vers un réel solution de l'équation $x=\frac{1}{3}x+5$.

c) $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ donne $u_{n+1}+h=\frac{1}{3}(u_n+h)$, donc $\frac{1}{3}u_n+5+h=\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}h$ qui mène à $h=\frac{-15}{2}$

d) v_n étant géométrique, $v_n=v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n$, or $v_0=u_0-\frac{15}{2}=\frac{-11}{2}$, donc $v_n=\frac{-11}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $u_n=v_n+\frac{15}{2}=\frac{15}{2}-\frac{11}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Si *n* tend vers +∞, $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0, donc u_n tend vers $\frac{15}{2}$.

2. Pour chaque point M de D il existe un réel *t* tel que M ait pour coordonnées cartésiennes (2 + 2*t*, 1 – 2*t*, -4 + 4*t*) (représentation paramétrique de D). Si M est aussi dans le plan P, ses coordonnées vérifient l'équation de P donc 2 + 2*t* + 2(1 – 2*t*) – (–4 + 4*t*) + 2 = 0 ce qui mène à 10 – 6*t* = 0 d'où t = $\frac{5}{3}$. On en déduit M $\left(\frac{16}{3};-\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Sujet 22

1- Soit F la fonction définie sur]0; +∞[par : $F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$.

a) Déterminer le sens de variation de F.

b) Prouver que, pour tout t de]0; +∞[, $\frac{e^t}{t}>\frac{1}{t}$.

En déduire, suivant les valeurs de x dans]0; +∞[, le signe de $\varphi(x) = F(x) - \ln x$.

c) Déduire de cette étude le comportement de F en +∞ et en 0.

2- Dans une urne, il y a 8 jetons jaunes et 12 jetons rouges indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard.

a) Déterminer la probabilité de l'évènement E : «le jeton tiré est jaune ».

b) On répète 7 fois cette épreuve; après chaque épreuve, le jeton est remis dans l'urne. Calculer la probabilité des évènements :

- A : «E se produit exactement trois fois ».
- B : «E se produit au moins six fois ».

Réponses

1. a) $F'(x)=\frac{e^x}{x}$ est donc positive sur]0; +∞[, d'où F est croissante sur]0; +∞[.

b) $t > 0 \Rightarrow e^t > e^0$, soit $e^t > 1$ et donc pour $\frac{e^t}{t}>\frac{1}{t}$. En intégrant, on obtient :

- si $x > 1$, $\int_1^x \frac{e^t}{t}dt>\int_0^x \frac{1}{t}dt$ donc $F(x) > \ln x$ et $F(x) - \ln x > 0$.

- si $x < 1$, $\int_x^1 \frac{e^t}{t}dt>\int_x^1 \frac{1}{t}dt$ donc $-F(x) > -\ln x$ et $F(x) - \ln x < 0$.

c) Pour $x > 1$, $F(x) > \ln x$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$.

Pour $x < 1$, $F(x) < \ln x$ et $\lim_{x\to 0} \ln x=-\infty$, donc $\lim_{x\to 0} F(x)=-\infty$.

2. a) $P(E)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

b) Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de répétitions de E. X suit une loi binomiale de paramètres 7 et P(E).

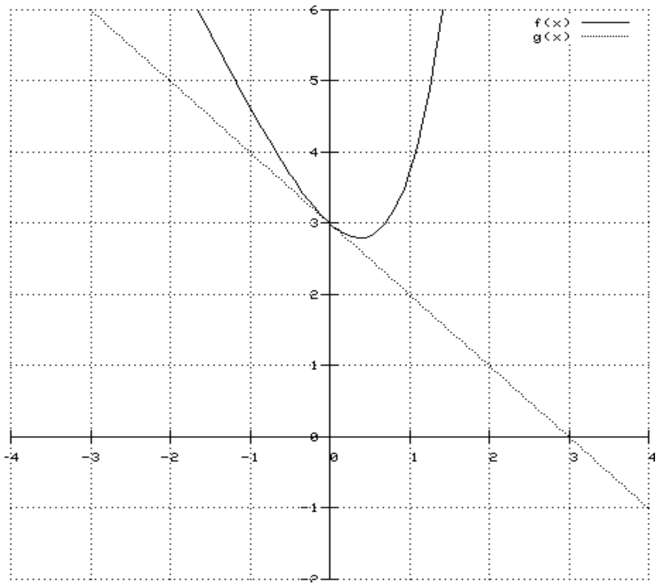
$P(A) = P(X = 3) = \binom{7}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^4 \approx 0{,}29$.

$P(B) = P(X \geqslant 6) = P(X = 6) + P(X = 7) = \binom{7}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^6\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)^7 \approx 0{,}0188$.

Sujet 23

1- La figure donne la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b+xe^x$, ainsi que sa tangente en 0 d'équation $y = g(x)$.

a) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ à l'aide du graphique.
b) En déduite les valeurs de a et b.



2- Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle A, B et C les points d'affixes $z_A = 2\mathrm{i}$, $z_B = 6$, $z_C = (3+\sqrt{3}) + i(3\sqrt{3}+1)$.

Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Que peut-on en déduire ?

Réponses

1. a) $f(0) = 3$ et $f'(0) = -1$.

b) $f(0) = 3$ donc $b = 3$. $f'(x) = a + e^x + xe^x$. $f'(0) = -1$ donc $a + 1 = -1$ et $a = -2$.

Ainsi $f(x) = -2x + 3 + xe^x$.

2. $$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3+\sqrt{3} + i(3\sqrt{3}-1)}{6-2\mathrm{i}} = \frac{(3+\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}-1))(6+2\mathrm{i})}{(6-2\mathrm{i})(6+2\mathrm{i})} = \frac{20+20\mathrm{i}\sqrt{3}}{40} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On reconnaît le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

Ainsi $\dfrac{AC}{AB} = \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est donc équilatéral.

Sujet 24

1- Soit f la fonction définie sur]0; +∞[par $f(x)=1-\frac{1}{x}-2\ln x$

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Etudier les variations de f.

c) Préciser les limites de f en 0 et en +∞.

(pour l'étude en 0 on pourra écrire $\frac{1}{x}+2\ln x=\frac{1}{x}(1+2x\ln x)$)

2- Une urne contient quatre boules rouges et une boule blanche. On prélève une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne. On recommence cette expérience trois fois de suite.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges obtenues.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance, et son écart-type.

Réponses

1. a) $f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{1-2x}{x^2}$.

b) $f'(x)$ a le même signe que $1-2x$, donc $f'(x)>0$ et f est croissante pour $x<\frac{1}{2}$ et $f'(x)<0$ et f est décroissante pour $x>\frac{1}{2}$.

c) Lorsque x tend vers +∞, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et ln x tend vers +∞, donc $f(x)$ tend vers -∞.

Remarquons que $f(x)=1-\frac{1}{x}-2\ln x=1-\frac{1}{x}(1+2x\ln x)$. Lorsque x tend vers 0, $\frac{1}{x}$ tend vers +∞ et $x\ln x$ tend vers 0, donc $1+2x\ln x$ tend vers 1 et $f(x)$ tend vers -∞.

2. a) X suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{4}{5}$. On a :

P(X=0) = $\frac{1}{125}$, P(X=1) = $\frac{12}{125}$, P(X=2) = $\frac{48}{125}$ et P(X=3) = $\frac{64}{125}$.

b) L'espérance mathématique de X est E(X) = $3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$.

La variance de X est V(X) = $3\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{12}{25}$.

L'écart type est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{12}{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.